Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (2013)
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. *Considera el siguiente problema de programación lineal:*

Maximiza la función $z = x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

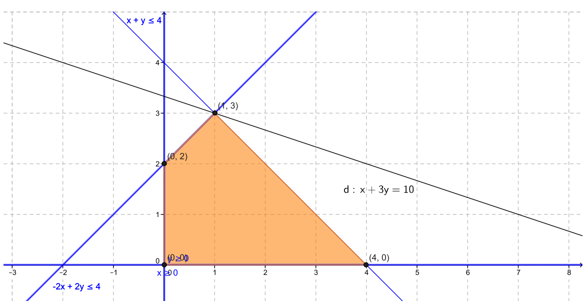
$$\begin{array}{lll} -x+y & \leq & 2 \\ x+y & \leq & 4 \\ x \geq 0 & & \\ y \geq 0 & & \end{array}$$

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 puntos)

c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor. (0.25 puntos)

Solución:



a)

Por cada inecuación bien dibujada (0.25 ptos) o todo correcto (1 pto).

b) Vértices (0,0),(0,2)(1,3)(4,0). 0.25 puntos

c) Solución óptima (1,3) Valor 10. 0.25 puntos

2. *En un departamento de una empresa internacional trabajan 18 personas de tres nacionalidades: franceses, ingleses y alemanes. El número de empleados franceses es igual al doble del número que resulta al sumar el número de ingleses y alemanes. Y el número de alemanes es el doble del número de ingleses.*

a) Plantea el sistema que permita obtener el número de trabajadores de cada nacionalidad. (1.5 puntos)

b) Resuelve el problema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

Solución:

a) Por cada ecuación bien planteada. (0.5 puntos)

x=nº de trabajadores franceses; y=nº de trabajadores ingleses; z= nº de trabajadores alemanes

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x=2(y+z) \\ z=2y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} x+\quad y+z=18 \\ x-2y-2z=0 \\ 2y-z=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} x+y+z=18 \\ y+z=6 \\ 2y-z=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} x+y+z=18 \\ y+z=6 \\ y=2 \end{array}\right.$$

b) Solución: x=12 , y=2, z=4. Por tener bien resuelto el sistema. 0.5 puntos

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+t & si\ x \leq 2 \\ (x-4)^2+1 & si\ x > 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = 2. (0.5 ptos)

b) Para t = 0, representa gráficamente la función f. (1 pto)

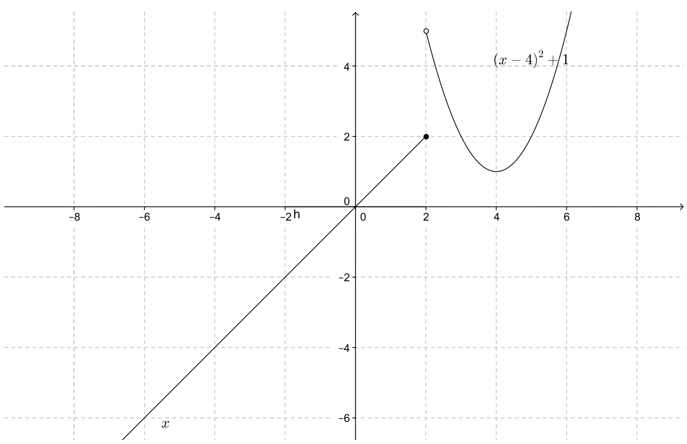
Solución:

a) Para que sea continua, debe coincidir el valor de la función en ese punto con sus límites laterales.

Saber condiciones (0.25 puntos)

Cálculo correcto del valor, t=3 (0.25 puntos)

b)



0.5 ptos por cada trozo bien dibujado

4. *a) Calcula el valor del parámetro a para que la función* $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 12x + 5$ *tenga un mínimo en el punto de abscisa x=1.(0.75 puntos).*

b) Para el valor de a calculado en el apartado anterior, halla el máximo relativo de la función anterior. (0.75 puntos)

Solución: a) $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 12x + 5$, $f'(x) = 3ax^2 + 6x - 12$ (0.25 puntos)

Si $x = 1$ es un mínimo entonces $f'(x = 1) = 0 \Rightarrow 3a + 6 - 12 = 0 \Rightarrow a = 2$ (0.5 puntos)

b) Sustituyendo a por 2: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$
$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = -2$ (0.25 puntos)
$f''(x) = 12x + 6 \Rightarrow f''(x = -2) = 12(-2) + 6 = -18 < 0$ corresponde a un máximo. (0.25 puntos)
$(x = -2, f(-2) = 25)$ es un máximo relativo (0.25 puntos)

5. *Una empresa sabe que la probabilidad de que un ordenador tenga virus es 0.9. Dicha empresa tiene tres ordenadores independientes.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres ordenadores tengan virus? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los tres ordenadores tenga virus? (0.5 puntos)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los tres ordenadores tenga virus? (0.5 puntos)

Solución:

V=Virus; P(V)=0.9; NV=Vo Virus; P(NV)=0.1. Son sucesos independientes.

a) P(Tres tengan virus)=P(V)*P(V)*P(V)=0.9*0.9*0.9=0.729. (0.5 puntos)

b) P(Ninguno tenga virus)=P(NV)*P(NV)*P(NV)=0.1*0.1*0.1=0.001. (0.5 puntos)

c) P(Al menos 1)=1-P(ninguno tenga virus)=1-(0.1*0.1*0.1)=0.999. (0.5 puntos)

6. *La concentración de ácido úrico en sangre, en mujeres sanas, se distribuye según una normal de media desconocida y desviación típica 1 mg/dl. Se seleccionan al azar 100 mujeres y, mediante un análisis, se observa que la concentración media de ácido úrico en la muestra estudiada es de 3.5 mg/dl.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media de la concentración de ácido úrico en las mujeres con un nivel de confianza del 97%. (1 punto)

b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) Del enunciado se deduce: $\bar{x} = 3{,}5\ mg/dl$, $n = 100$ y $\sigma = 1\ mg/dl$

1- $\alpha = 0{,}97$ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$=2.17 (0.25 puntos)

IC=($\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) (0.25 puntos)

IC= (3.5 - 2.17$\frac{1}{\sqrt{100}}$, 3.5 + 2.17 $\frac{1}{\sqrt{100}}$)=(3.283, 3.717). (0.5 puntos)

b) Disminuyendo el nivel de confianza (0.5 puntos) o aumentando el tamaño de la muestra (0.5 puntos)

Propuesta B

1. *a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $-7 \cdot I - 5 \cdot X + A \cdot X = B$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad). (0.75 ptos)*

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $X \cdot A = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (0.75 ptos)

Solución:

a) $-7 \cdot I - 5 \cdot X + A \cdot X = B$

$-5 \cdot X + A \cdot X = B + 7 \cdot I$ (0.25 puntos)

$(-5 \cdot I + A) \cdot X = (B + 7 \cdot I)$(0.25 puntos)

$X = (-5 \cdot I + A)^{(-1)} \cdot (B + 7 \cdot I)$(0.25 puntos)

b) 0.5 puntos por procedimiento y 0.25 puntos por $X = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. *Una floristería elabora, para el día de la madre, tres tipos de centros florales: tipo I, tipo II y tipo III, que llevan margaritas, gerberas y liliums, en las siguientes cantidades:*

	Tipo I	*Tipo II*	*Tipo III*
Margaritas	*12*	*4*	*8*
Gerberas	*10*	*15*	*5*
Liliums	*3*	*6*	*12*

Si se dispone de 100 margaritas, 125 gerberas y 75 liliums:

a) Plantea el sistema que permita averiguar cuántos centros florales de cada tipo se podrán elaborar utilizando todas las flores disponibles. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

Solución:

a) Por cada ecuación bien planteada. 0.5 puntos

x= nº de centros florales de tipo I

y=nº de centros florales de tipo II

z=nº de centros florales de tipo III

$$\left\{\begin{array}{l} 12x + 4y + 8z = 100 \\ 10x + 15y + 5z = 125 \\ 3x + 6y + 12z = 75 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 3x + y + 2z = 25 \\ 2x + 3y + z = 25 \\ x + 2y + 4z = 25 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 3x + y + 2z = 25 \\ x + 5y = 25 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

b) Solución: x=5, y=4, z=3. Por tener bien resuelto el sistema. 0.5 puntos

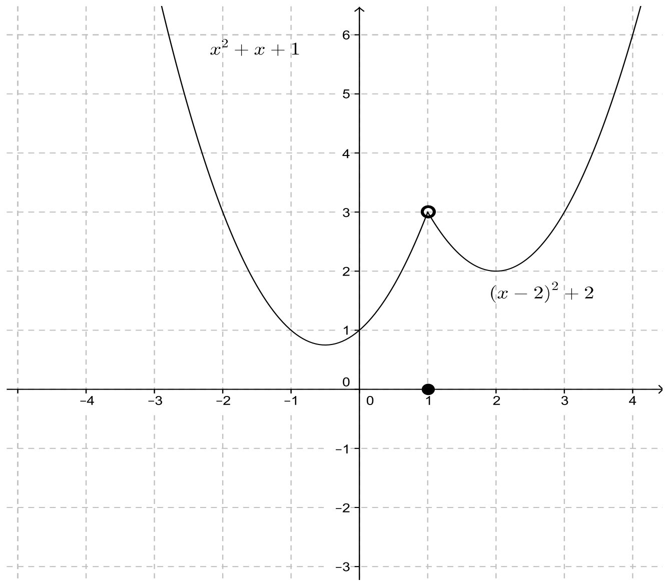
3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & si\ x < 1 \\ 0 & si\ x = 1 \\ (x-2)^2 + 2 & si\ x > 1 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad en $x = 1$. (0.5 ptos)

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$. (0.5 ptos)

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-\infty, 1)$. (0.5 ptos)

Solución:



a) Para que sea continua, debe coincidir el valor de la función en ese punto con sus límites laterales.

Saber condiciones. (0.25 puntos). No es continua en x=1. (0.25 puntos)

b) Saber condiciones de extremo. (0.25 puntos). Tiene un mínimo en (-1/2,3/4). (0.25 puntos)

c) ($-\infty$,-1/2) decreciente y (-1/2,1) creciente. (0.5 puntos)

4. *El ruido, medido en decibelios, producido por la música y los clientes en un local nocturno, se ajusta a la función: $R(t) = -4t^2 + 24t + 54$, siendo t el tiempo medido en horas, $0 \le t \le 6$.*

a) En la primera hora ($t = 1$), ¿cuántos decibelios se registraron? (0.25 puntos)

b) ¿En qué momento se produce mayor ruido y a cuántos decibelios asciende? (1.25 puntos)

Solución:

a) $R(1) = -4 + 24 + 54 = 74 \Rightarrow$ En la primera hora, $t = 1$, se registraron 74 decibelios (0.25 puntos)

b) $R'(t) = -8t + 24$ (0.25 puntos)
$R'(t) = 0 \Rightarrow -8t + 24 = 0 \Rightarrow\ t = 3$ (0.25 puntos)
$R''(t) = -8 \Rightarrow R''(t = 3) = -8 < 0 \Rightarrow$corresponde a un máximo (0.25 puntos)
$R(t = 3) = 90$ decibelios. En la tercera hora se produce más ruido 90 decibelios. (0.5 puntos)

5. *En un temario para la oposición a una plaza, hay 25 temas de los cuáles 5 son de legislación y el resto del contenido propio de la plaza. Cada opositor elige al azar dos temas. Obviamente el mismo tema no puede salir dos veces.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que de los dos temas elegidos ninguno sea de legislación? (0.75 ptos)

b) Si un opositor ha estudiado 10 temas de los 25, ¿cuál es la probabilidad de que de los dos temas escogidos al menos uno sea de los que ha estudiado ? (0.75 ptos)

Solución:

L=Legislación; E= Estudiado; NL=No es de legislación

a) P(L)=5/25=1/5; P(NL)=20/25;

P(Ninguno legislación)=P(NL 1)*P(NL 2/NL 1)=20/25*19/24=0.6333333. (0.75 puntos)

b) NE= No estudiado; P(E)=10/25

P(Ninguno estudiado)=P(NE 1)*P(NE 2/NE 1)=15/25*14/24=0.35

P(Al menos 1 estudiado)=1-P(ninguno estudiado)=1-0.35=0.65. (0.75 puntos)

6. *En un centro de investigación, se está estudiando el tiempo de eliminación de una toxina en la sangre mediante un fármaco. Se sabe que el tiempo de eliminación de esta toxina sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 6 horas. Se toma una muestra aleatoria de 10 pacientes y se concluye que el tiempo que tardan en eliminar dicha toxina es: 39, 41, 42, 44, 48, 50, 53, 54, 59 y 60 horas respectivamente.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de eliminación de dicha toxina con un nivel de confianza del 97 %. (1.25 puntos)

b) ¿Cuál debería ser como mínimo el tamaño de la muestra, para que el error máximo admisible de estimación de la media sea inferior a 2 horas, con un nivel de confianza del 97 %? (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) La media muestral es:

$\bar{x} = \frac{39+41+42+44+48+50+53+54+59+60}{10} = 49\,horas$ (0.25 puntos)

Del enunciado se deduce: $n = 10$ y $\sigma = 6$ $horas$

1- $\alpha = 0{,}97 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17$ (0.25 puntos)

IC= $\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ (0.25 puntos)

IC= $\left(49 - 2.17\frac{6}{\sqrt{10}}, \quad 49 + 2{,}17 \frac{6}{\sqrt{10}} \right) = (44.883, 53.117)$ (0.5 puntos)

b) El error viene dado por E= $Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (0.25 puntos)

para E< 2 $\Rightarrow$ $n > \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma}{E}\right]^2 = \left[\frac{2{,}17 \cdot 6}{2}\right]^2 > 42{,}38.$

El tamaño mínimo de la muestra para que el error de estimación de la media sea inferior a 2 horas, con el mismo nivel de confianza debe ser 43. (0.5 puntos)