PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 (2023)
Adaptación del modelo de examen a causa de COVID-19
Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Esta prueba consta de dos propuestas (A y B) con seis problemas cada una. Se ha de elegir una propuesta y resolver un máximo de 4 problemas de la propuesta elegida. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. El número de personas que han ido a vacunarse durante ocho semanas consecutivas viene dado por la función $C(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 50$, siendo $C(x)$ el número de personas (en miles) y x la semana $(1 \leq x \leq 8)$.

a) ¿Cuándo acude más gente? ¿En qué semana van menos personas? (1 punto)

b) ¿Cuántas personas hay en las semanas de máxima y mínima asistencia? (0.5 puntos)

c) ¿En qué intervalo de tiempo decrece la cantidad de personas que acuden a vacunarse? (1 punto)

Solución:

a) Los valores máximos y mínimos relativos verifican $C'(x) = 0$ y se tiene que $C'(x) = 3x^2 - 18x + 15 \Rightarrow C'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ y $x = 5$. Evaluando en $C''(x) = 6x - 18$:

$C''(1) = 6 \cdot 1 - 18 = -12 < 0 \Rightarrow x = 1$ es máximo relativo

$C''(5) = 6 \cdot 5 - 18 = 12 > 0 \Rightarrow x = 5$ es mínimo relativo.

Calculamos sus valores y se comparan con el otro extremos del intervalo:

$C(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 50 = 57$

$C(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 50 = 25$

$C(8) = 8^3 - 9 \cdot 8^2 + 15 \cdot 8 + 50 = 106$

Por tanto, la semana 5 es la que menos personas acuden y la semana 8 la que más personas acuden. (0.5 puntos por los extremos y 0.5 puntos por determinar las semanas de máxima y mínima asistencia)

b) La máxima asistencia son 106000 personas y la mínima asistencia 25000 personas. (0.5 puntos)

c) La función decrece cuando la primera derivada es negativa, $C'(x) < 0$ en el intervalo $(1, 5)$ semanas. (1 punto)

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $M = A \cdot B + 2I$ donde I es la matriz identidad de orden 3. (1.25 puntos)

b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $X \cdot C = I$ donde I es la matriz identidad de orden 2. (1.25 puntos)

Solución:

a) $A \cdot B + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. (1.25 puntos)

b) $X \cdot C = I \Leftrightarrow X = C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. (1.25 puntos)

3. En la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$, se pide:

a) Calcular los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función. (1.5 puntos)

b) Averiguar los puntos de inflexión. (0.5 puntos)

c) Estudiar la curvatura (intervalos de concavidad y convexidad). (0.5 puntos)

Solución:

a) Los posibles máximos y mínimos verifican $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ y $x = \pm 2$. Se evalúan los valores obtenidos en $f''(x) = 12x^2 - 16$ para determinar si los puntos encontrados son máximos o mínimos.

$f''(0) = -16 < 0 \Rightarrow$ máximo. (0.5 puntos)

$f''(\pm 2) = 32 > 0 \Rightarrow$ mínimo. (0.5 puntos)

Los puntos obtenidos son:

$f(0) = 9 \Rightarrow P(0, 9)$ máximo relativo. (0.25 puntos)

$f(\pm 2) = 7 \Rightarrow P(-2, -7)$ y $P(2, -7)$ mínimos relativos. (0.25 puntos)

b) Los posibles puntos de inflexión cumplen $f''(x) = 12x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Se evalúa en $f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \neq 0$ confirmando que son puntos de inflexión.

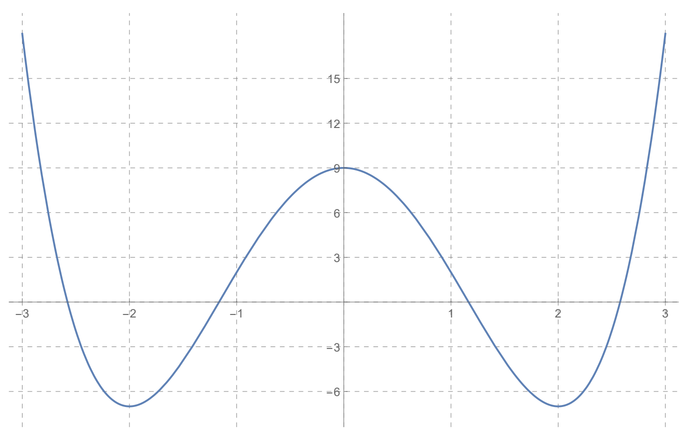
Por tanto, $f\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9} \Rightarrow P\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{9}\right)$ y $P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{9}\right)$ son los puntos de inflexión. (0.5 puntos)

c) El estudio de concavidad viene dado por el signo de la segunda derivada: $f''(x) = 0$ para $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$:

$f''(x) > 0$ para el intervalo $\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$ es convexa (si se le llama convexa a la forma $\cup$)

$f''(x) < 0$ para el intervalo $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$ es cóncava ($\cap$)

$f''(x) > 0$ para el intervalo $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right) \Rightarrow$ es convexa ($\cup$)(0.5 puntos)



4. En un instituto se ha organizado un concurso literario y han sido seleccionados tres relatos. Hay un jurado para elegir el relato ganador, que está formado por 30 personas, cada miembro del jurado tiene que votar uno de los tres relatos y todos los votos han sido válidos. El relato A ha obtenido el doble número de votos que el relato B, y si uno de los votantes del relato C hubiese dado su voto al relato B, éstos hubieran empatado.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que responda a las condiciones del enunciado. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado para determinar cuantos votos ha obtenido cada relato. (1.5 puntos)

Solución:

a) Tomando $x \equiv$ votos relato A; $y \equiv$ votos relato B; $z \equiv$ votos relato C.

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ x=2y \\ z-1=y+1 \end{cases}$$ (0.25 puntos por cada ecuación bien planteada. Todas bien 1 punto)

b) La solución del sistema es $(x, y, z) = (14, 7, 9)$ votos. El relato A obtuvo 14 votos, el B obtuvo 7 y el C obtuvo 9. (1 punto por el desarrollo de la resolución y 0.5 puntos por la solución correcta)

5. En una clase formada por 32 alumnos, 20 han aprobado Matemáticas, 17 han aprobado Física y 8 han suspendido las dos asignaturas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de suspender alguna de las dos asignaturas? (1.25 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar las dos asignaturas? (1.25 puntos)

Solución:

$M =$ aprobar Matemáticas; $F =$ aprobar Física. Se tiene que $P(M) = \frac{20}{32}$, $P(F) = \frac{17}{32}$ y $P(M^c \cap F^c) = \frac{8}{32}$

a) $P(M^c \cup F^c) = P(M^c) + P(F^c) - P(M^c \cap F^c) = \frac{12}{32} + \frac{15}{32} - \frac{8}{32} = \frac{19}{32} = 0.5938$. (1.25 puntos)

b) $P(M \cap F) = 1 - P(M^c \cup F^c) = 1 - \frac{19}{32} = \frac{13}{32} = 0.4062$. (1.25 puntos)

6. Un fabricante de bombillas ha tomado una muestra aleatoria de 49 bombillas y ha medido el tiempo en horas que tardan en fundirse, proporcionando una media de 364 horas. Si se sabe que el tiempo que tardan en fundirse sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 515.29$ horas^2, se pide:

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo que tardan en fundirse con un nivel de confianza del $97\,\%$. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.75 puntos)

c) El fabricante afirma que el tiempo que tardan en fundirse es de 370 horas. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del $99\,\%$? Justificar la respuesta. (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) Del enunciado se deduce: $\bar{X} = 364$ horas, $\sigma^2 = 515.29$ horas^2 $\Rightarrow \sigma = 22.7$ horas, $n = 49$, $1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$ (0.25 puntos)

IC $= \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ (0.25 puntos)

IC $= \left(364 - 2.17 \frac{22.7}{\sqrt{49}},\ 364 + 2.17 \frac{22.7}{\sqrt{49}} \right) = (356.963,\ 371.037)$ (0.5 puntos)

b) Para aumentar la amplitud del intervalo manteniendo el nivel de confianza, hay que aumentar el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y como σ es un valor fijo, la única opción es disminuir el tamaño de muestra. (0.25 puntos por la respuesta correcta y 0.5 puntos por el razonamiento)

c) El valor de 370 horas está en el intervalo calculado al $97\,\%$, como al aumentar el nivel de confianza aumenta la amplitud del intervalo, el valor de 370 horas estará en el IC al $99\,\%$ y por lo tanto se puede aceptar la afirmación del fabricante. (0.25 puntos por la respuesta correcta y 0.5 puntos por el razonamiento)

<u>**Propuesta B**</u>

1. El consumo de energía, en kWh, de un determinado hogar a lo largo de un año viene reflejado por la función $C(x) = x^3 - 15x^2 + 48x + 100$, siendo x los meses del año de enero a diciembre $(1 \leq x \leq 12)$.

a) ¿En qué mes se produjo el mayor consumo de energía y cuántos kWh se consumieron? (1.25 puntos)

b) ¿En qué intervalos de tiempo crece el consumo de energía? (1.25 puntos)

Solución:

a) Los valores máximos y mínimos relativos verifican $C'(x) = 0$ y se tiene que $C'(x) = 3x^2 - 30x + 48 \Rightarrow C'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ y $x = 8$. Evaluando en $C''(x) = 6x - 30$:

$C''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -18 < 0 \Rightarrow x = 2$ es máximo relativo

$C''(8) = 6 \cdot 8 - 18 = 18 > 0 \Rightarrow x = 8$ es mínimo relativo.

Calculamos sus valores y se comparan con los extremos del intervalo:

$C(1) = 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 48 \cdot 1 + 100 = 134$

$C(2) = 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 48 \cdot 2 + 100 = 144$

$C(12) = 12^3 - 15 \cdot 12^2 + 48 \cdot 12 + 100 = 244$

Por tanto, el consumo máximo se produjo en diciembre con 244 kWh. (0.75 puntos por los extremos y 0.5 puntos por determinar las semana de máximo consumo y su valor)

b) La función crece cuando la primera derivada es positiva, $C'(x) > 0$ en los intervalos $(1, 2)$ y $(8, 12)$. (1.25 puntos)

2. Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (I la matriz identidad de orden 2):

a) Calcula $C \cdot B^2 \cdot 2I$. (1 punto)

b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $BX - I = D^T$. (1.5 puntos)

Solución:

a) $C \cdot B^2 \cdot 2I = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 25 \\ -1 & -9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 50 \\ -2 & -18 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$. (1 punto)

b) $BX - I = D^T \Leftrightarrow X = B^{-1}\left(D^T + I\right) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$

$= \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (1.5 puntos)

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x \leq 0 \\ -x^2 + 4 & si\ 0 < x \leq 2 \\ 2x + 1 & si\ x > 2 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad en $x = 0$. (0.75 puntos)

b) Estudia la continuidad en $x = 2$. (0.75 puntos)

c) Representa gráficamente $f(x)$. (1 punto)

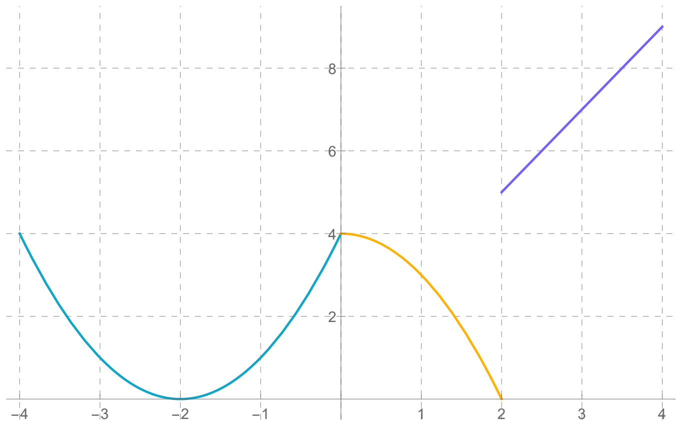
a) La función es continua en $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+2)^2 = 4$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x^2+4) = 4$. Como $f(0) = (0+2)^2 = 4 \Rightarrow$ la función es continua en $x = 0$. (0.75 puntos)

b) La función es continua en $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. Para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} -x^2+4 = 0$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(2x+1) = 5$. Como los límites laterales no coinciden hay una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 2$. (0.75 puntos)

c) (1 punto)



4. Una pastelería hace todos los días tartas y bizcochos. Para una tarta se necesitan 1 kg de harina y 3 kg de azúcar y para un bizcocho se necesitan 2 kg de harina y 2 kg de azúcar. Diariamente han de hacer al menos 2 tartas y 3 bizcochos. Se dispone de 16 kg de harina y 24 kg de azúcar y la tarta se vende por 20 euros, mientras que el bizcocho por 15 euros.

a) Expresa la función objetivo. (0.5 puntos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.5 puntos)

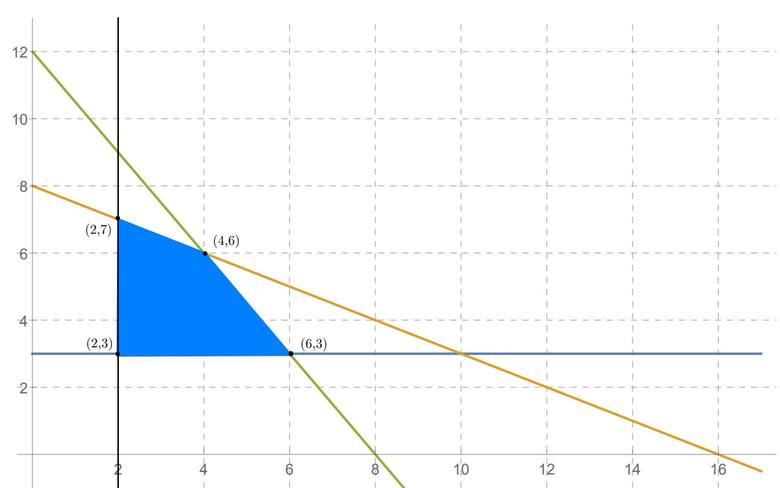
c) Halla el número de tartas y bizcochos que deben hacerse para que el beneficio sea máximo. (0.5 puntos)

Solución:

a) $x \equiv$ número de tartas; $y \equiv$ número de bizcochos. La función objetivo es $Z(x,y) = 20x + 15y$. (0.5 puntos)

b) Las restricciones del problema son $\left\{\begin{array}{c} x \geq 2 \\ y \geq 3 \\ 3x + 2y \leq 24 \\ x + 2y \leq 16 \end{array}\right.$

(0.75 puntos por restricciones y 0.75 puntos por representar la región factible)



c) Los vertices de la región factible son: $A = (2, 3)$, $B = (6, 3)$, $C = (4, 6)$, y $D = (2, 7)$. (0.25 puntos por los vértices). $Z(A) = 85$; $Z(B) = 165$; $Z(C) = 170$; $Z(D) = 145$. Luego la solución para maximizar el beneficio es realizar 4 tartas y 6 bizcochos. (0.25 puntos por respuesta correcta)

5. En un examen de matemáticas se les proponen a los estudiantes 3 problemas (I, II, III), de los que han de elegir obligatoriamente uno. La mitad de los alumnos eligen el problema I, y de estos aprueban el $60\,\%$. El $30\,\%$ eligen el problema II, suspendiendo en este caso el $25\,\%$ de los estudiantes. Por último de los que eligen el problema III, aprueban el $30\,\%$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de elegir el examen II y aprobar? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen? (1 punto)

c) Sabiendo que el estudiante ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido el problema I? (1 punto)

Solución:

$I =$ Problema I; $II =$ Problema II; $III =$ Problema III; $A =$ Aprobar; $A^c =$ Suspender.

$P(I) = 0.5$; $P(II) = 0.3$; $P(III) = 0.2$; $P(A \mid I) = 0.6$; $P(A \mid II) = 0.75$; $P(A \mid III) = 0.3$.

a) $P(II \cap A) = P(II) \cdot P(A \mid II) = 0.3 \cdot 0.75 = 0.225$. (0.5 puntos)

b) $P(A) = P(I) \cdot P(A \mid I) + P(II) \cdot P(A \mid II) + P(III) \cdot P(A \mid III) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.3 = 0.585$. (1 punto)

c) $P(I \mid A^c) = \frac{P(I \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(I) \cdot P(A^c \mid I)}{P(A^c)} = \frac{0.5 \cdot 0.4}{(1 - 0.585)} = 0.482$. (1 punto)

6. En un equipo infantil de fútbol, se tomó una muestra aleatoria de 10 niños y se contaron el número de toques al balón que hacían sin dejar caer la pelota, obteniéndose 12, 16, 25, 18, 13, 8, 10, 9, 12 y 13 toques de balón. Si se sabe que la variable *toques de balón* sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ toques.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de toques de balón con un nivel de confianza del $95\,\%$. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza disminuimos el tamaño de muestra. (0.75 puntos)

c) El entrenador del equipo afirma que el número medio de toques que pueden dar sus jugadores es de 18. ¿Se puede aceptar la afirmación del entrenador con un nivel de confianza del $90\,\%$? Justificar la respuesta. (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) La media muestral es: $\bar{X} = \frac{12+16+25+18+13+8+10+9+12+13}{10} = 13.6$ toques.

Del enunciado se deduce: $\sigma = 5$ toques, $n = 10$, $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (0.25 puntos)

IC $= \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (0.25 puntos)

IC $= \left(13.6 - 1.96 \frac{5}{\sqrt{10}},\ 13.6 + 1.96 \frac{5}{\sqrt{10}}\right) = (10.501,\ 16.699)$ (0.5 puntos)

b) Al disminuir el tamaño de muestra, aumenta el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y por tanto aumentará la amplitud del intervalo. (0.25 puntos por la respuesta correcta y 0.5 puntos por el razonamiento)

c) El valor de 18 toques no está en el intervalo calculado al $95\,\%$, como al disminuir el nivel de confianza disminuye la amplitud del intervalo, el valor de 18 toques tampoco estará en el IC al $90\,\%$ y por lo tanto no se puede aceptar la afirmación. (0.25 puntos por la respuesta correcta y 0.5 puntos por el razonamiento)