**Instrucciones:** Se deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. **Dentro de la opción seleccionada, se elegirán CUATRO ejercicios entre los seis propuestos.** Si se respondiese a más, se corregirán sólo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Sólo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

## PROPUESTA A

**A1.** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz inversa de $A$. (**1,25 puntos**)

b) Despeja $X$ en la ecuación matricial $A \cdot X - B = I$ y calcula $X$, donde $I$ es la matriz identidad $3 \times 3$. (**1,25 puntos**)

**Solución:**

a) Tenemos que $|A| = 1$. Por tanto, existe la inversa de $A$ y es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Criterios de corrección:**
Dar la solución final 0,25; justificar los cálculos 0,75; realizar las operaciones razonadamente 0,25.

b) La solución es $X = A^{-1}(B + I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

**Criterios de corrección:**
Dar la solución final 0,25; despejar $X$ correctamente, 0,25; calcular $B + I$, 0,25; realizar el resto de los cálculos correctamente 0,25; justificar los cálculos 0,25. Si la inversa de A está mal, se considera el resto de cálculos como si fuera correcta.

**A2.** Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ \quad y + z & = & 0 \\ x - y - z & = & 1 \end{cases}$.

a) Clasifícalo razonadamente e indica el número de soluciones. (**1,25 puntos**)

b) Resuelve razonadamente el sistema anterior, si es posible, e indica el método de resolución empleado. (**1,25 puntos**)

**Solución:**

a) Tanto la matriz de coeficientes como la matriz ampliada tienen rango 2. Por tanto, se trata de un sistema compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

**Criterios de corrección:**
Cálculo del rango de la matriz de coeficientes, 0,25; cálculo del rango de la matriz ampliada, 0,25; decir que es un sistema compatible indeterminado, 0,25; decir el número de soluciones, 0,25; justificación, 0,25.

b) La solución es $x = 1, y = -t, z = t$ con $t \in \mathbb{R}$.

**Criterios de corrección:**
Solución final correcta, 0,25; decir y justificar el método de resolución, 0,75; realizar los cálculos correctamente, 0'25.

**A3.** Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$ (**1,25 puntos**)

b) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$ (**1,25 puntos**)

**Solución:**

a) El límite es un cociente de polinomios, ambos con una raíz en $x = 1$. Por tanto, se puede simplificar el cociente y $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = 4$.

**Criterios de corrección:**
Dar la solución final, 0,25; identificar la indeterminación, 0,25; justificar el método de resolución, 0,5; realizar los cálculos correctamente, 0,25.

b) Se trata de una indeterminación del tipo $1^\infty$. El resultado es $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \sqrt{e}$.

**Criterios de corrección:**
Dar la solución final, 0,25; identificar la indeterminación, 0,25; justificar el método de resolución, 0,5; realizar los cálculos correctamente, 0,25.

**A4**. Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & x \leq 1 \\ ax^2 & x > 1 \end{cases}$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Determina el valor de $a$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio. (**1,25 puntos**)

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$. (**1,25 puntos**)

**Solución:**

a) La función es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo, tal vez, en $x = 1$. Tomamos los límites laterales y vemos que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = e^0 = 1$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a \cdot 1^2 = a$. Además, $f(1) = e^0 = 1$. Por tanto, para que la función sea continua en $x = 1$ se tiene que cumplir que $a = 1$.

**Criterios de corrección:**
Dar el valor correcto de $a$, 0,25; justificar el método de resolución, 0,25; calcular los límites laterales, 0,25; valor de la función en 0,25; realizar los cálculos correctamente, 0,25.

b) Tomamos la derivada para $x < 1$, que es $f'(x) = e^{x-1}$. Por tanto, $f'(-1) = e^{-2}$. Además, $f(-1) = e^{-2}$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y = e^{-2} + e^{-2}(x+1)$

**Criterios de corrección:**
Dar la ecuación correcta, 0,25; calcular la derivada, 0,25; calcular la pendiente de la recta correctamente, 0,25; escribir la ecuación de la recta tangente, 0,25; realizar los cálculos correctamente, 0,25.

**A5**. Sean los vectores $\vec{u} = (1, -2, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, a)$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Calcula el valor de $a$ para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares. (**1 punto**)

b) Para el valor de $a$ obtenido en el apartado anterior, calcula la ecuación del plano cuyo vector normal es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y que pasa por el punto $A = (1, 0, -1)$. (**1,5 puntos**)

**Solución:**

a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ serán perpendiculares cuando su producto escalar sea cero. Por tanto, tenemos que $\vec{u} \cdot v = -2 + a = 0$ si y sólo si $a = 2$.

**Criterios de corrección:**
Dar el valor de $a$ correcto, 0,25; justificar el método de resolución, 0,5: realizar los cálculos correctamente, 0,25.

b) El vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se obtiene mediante su producto escalar, que es $\vec{u} \times \vec{v} = (-5, -2, 1)$. La ecuación del plano será -$5x - 2y + z = D$. Así, sustituyendo el punto $A$ en la ecuación del plano obtenemos -$5 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -6 = D$. Por tanto, la ecuación del plano es -$5x - 2y + x = -6$.

**Criterios de corrección:**

Dar el valor de la ecuación del plano correcta, 0,5; justificar el método de resolución, 0,75; realizar los cálculos correctamente, 0,25.

**A6.**

a) Un circuito electrónico está formado por tres componentes ($C1$, $C2$ y $C3$) que funcionan de manera independiente. El circuito sólo funciona si las tres componentes lo hacen. Las probabilidades de que cada una de ellas funcione son $P(C1) = 0{,}9; P(C2) = 0{,}95; P(C3) = 0{,}99$.

a.1) ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito funcione? (**0,5 puntos**)

a.2) ¿Cuál es la probabilidad de que alguna componente falle y el circuito no funcione? (**0,75 puntos**)

b) El tiempo que tarda un cirujano en completar una operación de rodilla se puede representar con una distribución normal de media 45 minutos y desviación típica 10 minutos.

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que la operación se complete en menos de 30 minutos? (**0,5 puntos**)

b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que la operación se complete entre 40 y 50 minutos? (**0,75 puntos**)

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.50** | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| **0.60** | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| **0.70** | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| **0.80** | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| **0.90** | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| **1.00** | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| **1.10** | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| **1.20** | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| **1.30** | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| **1.40** | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| **1.50** | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| **1.60** | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |

**Solución:**

a)

a.1) La probabilidad de que el circuito funcione es la de que las tres componentes funciones a la vez: $P(C1 \cap C2 \cap C3) = 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}99 = 0{,}84645$. Esto es así porque los sucesos son independientes.

a.2) La probabilidad de que alguna componente falle es el suceso complementario de que todas funcionen. Por tanto, la probabilidad de que alguna falle y el circuito no funcione es $P\left(\overline{C1 \cap C2 \cap C3}\right) = 1 - P(C1 \cap C2 \cap C3) = 1 - 0{,}84645 = 0{,}15355$.

__**Criterios de corrección:**__

a.1) Dar la solución correcta, 0,25; justificar la solución y hacer los cálculos correctamente, 0,25.

a.2) Dar la solución correcta, 0,25; justificar la solución, 0,25; hacer los cálculos correctamente, 0,25.

b) Sea $X$ la variable aleatoria que mide el tiempo que tarda un cirujano en completar una operación de rodilla.

a.1) Se pide $P(X < 30) = P(Z < -1{,}5) = 1 - P(Z < 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$.

a.2) Se pide $P(40 < X < 50) = P(X < 50) - P(X < 40) = P(Z < 0{,}50) - P(Z < -0{,}50) =$

$$= P(Z < 0{,}50) - \left(1 - P(Z < 0{,}50)\right) = 2 \cdot P(Z < 0{,}50) - 1 = 2 \cdot \ 0{,}6915 - 1 = 0{,}3830.$$

__**Criterios de corrección:**__

a.1) Dar la solución correcta, 0,25; justificar la solución y hacer los cálculos correctamente, 0,25.

a.2) Dar la solución correcta, 0,25; justificar la solución, 0,25; hacer los cálculos correctamente, 0,25.

**Instrucciones:** Se deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. **Dentro de la opción seleccionada, se elegirán CUATRO ejercicios entre los seis propuestos.** Si se respondiese a más, se corregirán sólo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Sólo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

## PROPUESTA B

**B1.** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcula el determinante de $A \cdot B$. (**1,25 puntos**)

b) Despeja $X$ en la ecuación matricial $A \cdot X - B = 0$ y calcula $X$. (**1,25 puntos**)

**Solución:**

a) Como $|A| = 1$ y $|B| = 2$, entonces $|A \cdot B| = 1 \cdot 2 = 2$.

**Criterios de corrección:**
Dar la solución final 0,25; justificar los cálculos 0,75; realizar las operaciones razonadamente 0,25.

b) La solución es $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**Criterios de corrección:**
Dar la solución final 0,25; despejar $X$ correctamente, 0,25; realizar los cálculos correctamente 0,25; justificar los cálculos 0,5. Si la inversa de A está mal, se considera el resto de cálculos como si fuera correcta.

**B2.** Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x + y + z & = & 0 \\ x + y & = & 0 \\ 2x + y + z & = & -1 \end{cases}$.

a) Clasifícalo razonadamente e indica el número de soluciones. (**1,25 puntos**)

b) Resuelve razonadamente el sistema anterior, si es posible, e indica el método de resolución empleado. (**1,25 puntos**)

**Solución:**

a) El rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada es 3. Por tanto, se trata de un sistema compatible determinado y tiene una única solución.

**Criterios de corrección:**
Cálculo del rango de la matriz de coeficientes, 0,25; cálculo del rango de la matriz ampliada, 0,25; decir que es un sistema compatible determinado, 0,25; decir el número de soluciones, 0,25; justificación, 0,25.

b) La solución es $x = -1, y = 1, z = 0$.

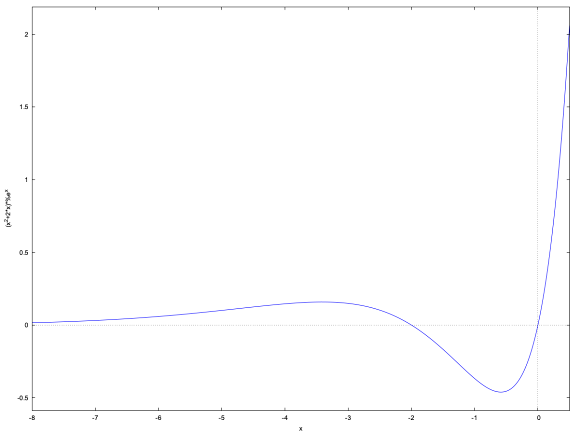
**Criterios de corrección:**
Solución final correcta, 0,25; decir y justificar el método de resolución, 0,75; realizar los cálculos correctamente, 0'25.

**B3.** Sea la función $f(x) = e^x(x^2 + 2x)$.

$a)$ Estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (**1,25 puntos**)

$b)$ Estudia sus extremos relativos. ¿Hay alguno de ellos que sea un extremo absoluto? (**1,25 puntos**)

**Solución:**
La gráfica de la función es:



a) La derivada de la función es $f'(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$. La derivada solo se anula cuando el término $x^2 + 4x + 2$ lo hace. Esto es, en $x = -2 \pm \sqrt{2}$. Podemos tomar tres puntos para evaluar la derivada y ver su signo en cada intervalo. Como el término $e^x$ siempre es positivo basta con evaluar el término $g(x) = (x^2 + 4x + 2)$ y estudiar su signo. Tomamos $g(-4) = 16 - 16 + 2 = 2 > 0$, $g(-2) = 4 - 8 + 2 = -2 < 0$ y $g(0) = 0 + 0 + 2 > 0$. Por tanto, en el intervalo $(-\infty, -2 - \sqrt{2})$ la función es creciente, en el intervalo $(-2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ es decreciente y en el intervalo $(-2 + \sqrt{2}, +\infty)$ es creciente.

**Criterios de corrección:**
Dar los puntos en los que se anula la derivada, 0,25; determinar los intervalos en los que la derivada crece o decrece, 0,75; realizar las operaciones correctamente, 0,25.

b) Al estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento vemos que en $x = -2 - \sqrt{2}$ la función tiene un máximo y en $x = -2 + \sqrt{2}$ un mínimo. Además, tenemos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Entonces, es imposible que haya máximos absolutos y en $x = -2 - \sqrt{2}$ tenemos un máximo relativo. El valor del mínimo relativo (en principio) es $f(-2 + \sqrt{2}) \simeq -0.4612$ y el máximo relativo es $f(-2f\sqrt{2}) \simeq 0{,}1589$. Además, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Por tanto, en $x = -2 + \sqrt{2}$ hay un mínimo absoluto.

**Criterios de corrección:**
Justificar el mínimo absoluto, 0,5; justificar el máximo relativo, 0,5; realizar las operaciones correctamente, 0,25.

**B4**. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{3x}} dx$ (**1,25 puntos**)

b) $\int \frac{x}{x^2+3} dx$ (**1,25 puntos**)

**Solución:**

a) La integral es inmediata y $\int \frac{1}{\sqrt{3x}} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} + C$.

**Criterios de corrección:**
Dar la solución correcta, 0,25; justificar el método de resolución, 0,75; realizar las operaciones correctamente, 0,25.

b) La integral también es inmediata: $\int \frac{x}{x^2+3} dx = \frac{\ln(x^2+3)}{2} + C$.

**Criterios de corrección:**
Dar la solución correcta, 0,25; justificar el método de resolución, 0,75; realizar las operaciones correctamente, 0,25.

**B5**. Sean los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, a, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determina los valores de $a$ y $b$ para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos. (**1 punto**)

b) Calcula la ecuación del plano que es perpendicular al vector $\vec{u}$ y que pasa por el punto $A = (0,0,0)$. (**1,5 puntos**)

**Solución:**

a) Para que los vectores sean paralelos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ deben ser proporcionales, es decir, $\frac{1}{2} = \frac{2}{a} = \frac{3}{b}$. Por tanto, $a = 4$ y $b = 6$.

**Criterios de corrección:**
Dar la solución correcta, 0,25; justificar el método de resolución, 0,5; realizar las operaciones correctamente, 0,25.

b) La ecuación del plano será $x + 2y + 3z = D$. Teniendo en cuenta que el punto $A$ pertenece al plano tenemos que $1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 = D$. Por tanto, la ecuación del plano es $x + 2y + 3z = 0$.

**Criterios de corrección:**
Dar la solución correcta, 0,5; justificar el método de resolución, 0,75; realizar las operaciones correctamente, 0,25.

**B6.**

a) Una urna contiene dos bolas negras, dos blancas y una roja. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento.
   a.1) ¿Cuál es la probabilidad de que una de las bolas extraída sea roja? (**0,5 puntos**)
   a.2) Si la primera bola extraída es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja? (**0,75 puntos**)

b) La probabilidad de que un jugador gane una partida a un determinado juego de azar es de $1/10$. Si este jugador juega 6 partidas, calcula:
   b.1) La probabilidad de que no gane ninguna partida. (**0,5 puntos**)
   b.2) La probabilidad de que gane al menos dos partidas. (**0,75 puntos**)

| | | p | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***n*** | ***k*** | **0.1** | **0.2** | **0.3** | **0.4** | **0.5** | **0.6** | **0.7** | **0.8** | **0.9** |
| 6 | 0 | 0.5314 | 0.2621 | 0.1176 | 0.0467 | 0.0156 | 0.0041 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 1 | 0.3543 | 0.3932 | 0.3025 | 0.1866 | 0.0938 | 0.0369 | 0.0102 | 0.0015 | 0.0001 |
| | 2 | 0.0984 | 0.2458 | 0.3241 | 0.3110 | 0.2344 | 0.1382 | 0.0595 | 0.0154 | 0.0012 |
| | 3 | 0.0146 | 0.0819 | 0.1852 | 0.2765 | 0.3125 | 0.2765 | 0.1852 | 0.0819 | 0.0146 |
| | 4 | 0.0012 | 0.0154 | 0.0595 | 0.1382 | 0.2344 | 0.3110 | 0.3241 | 0.2458 | 0.0984 |
| | 5 | 0.0001 | 0.0015 | 0.0102 | 0.0369 | 0.0938 | 0.1866 | 0.3025 | 0.3932 | 0.3543 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0007 | 0.0041 | 0.0156 | 0.0467 | 0.1176 | 0.2621 | 0.5314 |

**Solución:**

a)
a.1) Como solo hay una bola roja, la probabilidad de sacar una bola roja es la probabilidad de sacarla en la primera extracción más la probabilidad de sacarla en la segunda, es decir, $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.
a.2) La probabilidad es $\frac{1}{4}$ porque en la segunda extracción hay una bola roja y quedan 4 bolas en total.

**Criterios de corrección:**
a.1) Dar la solución correcta, 0,25; justificar la solución y hacer los cálculos correctamente, 0,25.
a.2) Dar la solución correcta, 0,25; justificar la solución, 0,25; hacer los cálculos correctamente, 0,25.

b) Sea $X$ la variable aleatoria que mide el número de partidas que gana el jugador.
b.1) Se pide $P(X = 0) = 0{,}5314$.
b.2) Se pide $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (0{,}5314 + 0{,}3543) = 0{,}1143$.

**Criterios de corrección:**
b.1) Dar la solución correcta, 0,25; justificar la solución y hacer los cálculos correctamente, 0,25.
b.2) Dar la solución correcta, 0,25; justificar la solución, 0,25; hacer los cálculos correctamente, 0,25.