

Instrucciones: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los **ejercicios 2, 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). **Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos.** Duración de la prueba: 90 minutos.

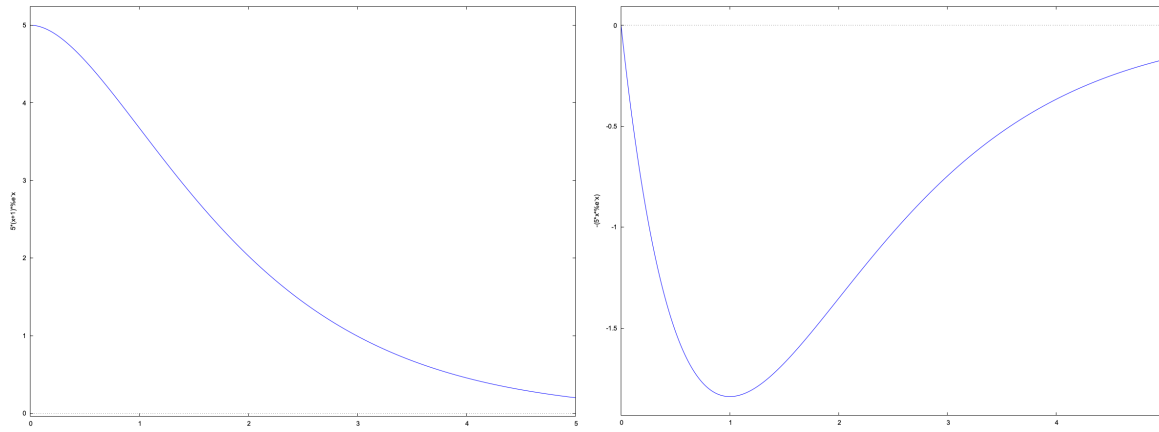
EJERCICIO 1. La concentración de virus activos en una muestra de sangre (en un tiempo t desde que se tomó la muestra) se puede modelizar como una función $f(t) = 5(t+1)e^{-t}$, con $t \geq 0$.

- a) **[1,25 puntos]** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(t)$ mide cómo cambia la concentración de virus activos. Calcula el tiempo en el que este cambio toma el valor más pequeño posible, es decir, el tiempo t en el que el valor de la derivada de $f(t)$ es mínimo.
- b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál sería el valor de la concentración de virus a largo plazo? Es decir, el valor cuando el tiempo tiende a infinito: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

Solución:

- a) La derivada de $f(t)$ es $f'(t) = g(t) = -5te^{-t}$. Por tanto, podemos hallar sus extremos relativos derivando e igualando a cero. Como $g'(t) = -5e^{-t}(1-t)$, tenemos que en $t = 1$ hay un extremo relativo. Además, $g'(t) < 0$ cuando $t < 1$ y $g'(t) > 0$ cuando $t > 1$. Por tanto, en $t = 1$ hay un mínimo relativo (que además es absoluto).

Las gráficas de $f(t)$ y $g(t)$ son, respectivamente, estas:



Criterios de corrección:

- Obtener $g(t)$, 0,25 puntos; cálculo de $g'(t)$, 0,25 puntos; determinar el punto en el que se anula la derivada, 0,25 puntos; justificar que es mínimo absoluto, 0,5 puntos.
- b) En este caso tenemos una indeterminación de tipo ∞ / ∞ :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5(t+1)e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5(t+1)}{e^t} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5(t+1)}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5}{e^t} = 0$$

Criterios de corrección:

- Establecer la indeterminación, 0,25 puntos; plantear el método de resolución, 0,5 puntos;

resolver el límite, 0,5 puntos.

EJERCICIO 2. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Sean las rectas $r_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

a.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación de la recta, r_3 , cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 y que pasa por el punto $A(0, 0, 0)$.

a.2) **[1,25 puntos]** Calcula la distancia de la recta r_2 al punto $B(-1, -1, 2)$.

Solución:

a.1) Sean $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$ los vectores directores de las rectas r_1 , r_2 y r_3 , respectivamente. Tenemos que

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (1, -1, 1) \times (2, 1, -1) = (0, 3, 3)$$

Así, podemos definir la recta que se pide de la siguiente manera:

$$r_3 \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, 3, 3), \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Criterios de corrección:

- Determinar los elementos que definen la recta (punto y vector director), 0,25 puntos; obtener $\vec{r}_3$, 0,5 puntos; ecuación de la recta (en cualquiera de sus formas), 0,5 puntos.

a.2) En primer lugar, podemos comprobar que el punto B no pertenece a la recta r_2 para descartar este caso: $\frac{-1-1}{2} \neq \frac{-1-1}{1}$. Sea P un punto de la recta r_2 , sabemos que la distancia de B a la recta es:

$$d(B, r_2) = \frac{\|\vec{PB} \times \vec{r}_2\|}{\|\vec{r}_2\|}$$

Si tomamos $P = (1, 1, 1)$, tenemos que $\vec{PB} = (-2, -2, 1)$ y $\vec{PB} \times \vec{r}_2 = (1, 0, 2)$. Por tanto, la distancia es

$$d(B, r_2) = \frac{\|\vec{PB} \times \vec{r}_2\|}{\|\vec{r}_2\|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,25 puntos; plantear la fórmula de la distancia, 0,25 puntos; obtener $\vec{PB} \times \vec{r}_2$, 0,5 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

Apartado b) Sea la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv x - y + 3z = 0$.

b.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula el ángulo entre la recta r y el plano π teniendo en cuenta que se cortan en el punto $A(0, 0, 0)$.

Solución:

b.1) El plano vendrá definido por un punto de la recta, P , su vector director, $\vec{r}$, y el vector normal del plano π , $\vec{n}$. Sus valores son $P = (0, 0, 0)$, por ejemplo, $\vec{r} = (1, -1, 2)$ y $\vec{n} = (1, -1, 3)$. Así, la ecuación del plano es:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, -1, 2) + \gamma(1, -1, 3), \text{ con } \lambda, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Criterios de corrección:

- Determinar los elementos que definen el plano (punto y vectores directores), 0,75 puntos;

ecuación del plano (en cualquiera de sus formas), 0,5 puntos.

b.2) Podemos calcular el ángulo entre el plano y la recta, α , como

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{r}\|} = \frac{|1 + 1 + 6|}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{6}} = \frac{8}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{6}} = 0.9847$$

Entonces, $\alpha = \arcsen(0.9847) = 1.396$ radianes = 79.96451 grados.

Criterios de corrección:

- Plantear la ecuación del ángulo entre recta y plano, 0,25 puntos; determinar $\vec{n}$, 0,25 puntos; determinar $\vec{r}$, 0,25 puntos; obtener $\operatorname{sen}(\alpha)$, 0,25 puntos; obtener el ángulo, 0,25 puntos.

EJERCICIO 3. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x + y + a \cdot z = 1 \\ x - 2z = a \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

a.1) **[1'5 puntos]** Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a , e identifica el número de soluciones en cada caso.

a.2) **[1 punto]** Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Solución:

a.1) Sea M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada. Tenemos que $|M| = a - 3$. Por tanto, para $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Para el caso $a = 3$, tenemos que el rango de M es 2 y el de M^* es 3. Por tanto, el sistema es incompatible y no tiene solución.

Criterios de corrección:

- Cálculo del determinante de M y de los valores de a en los que se anula, 0,5 puntos; discusión razonada para $a \neq 3$, 0,25 puntos; cálculo del rango de M y M^* cuando $a = 3$, 0,5 puntos; discusión razonada de este caso, 0,25 puntos. Si se equivoca al calcular el determinante, no tenerlo en cuenta y valorar el resto.

a.2) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado y la solución es $x = 4/3$, $y = -1/3$, $z = 2/3$.

Criterios de corrección:

- Plantear el método de resolución, 0,75 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

Apartado b) Sea el sistema de ecuaciones $A \cdot X - B = X$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, tal que $m \in \mathbb{R}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Además, la matriz X es de dimensión 2×2 .

b.1) **[1,5 puntos]** ¿Para qué valores del parámetro m el sistema anterior tiene solución única?

b.2) **[1 punto]** Para $m = 1$, resuelve el sistema y obtén el valor de X .

Solución:

b.1) Podemos escribir la ecuación matricial así:

$$(A - I) \cdot X = B$$

Si tomamos $C = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}$, habrá solución única cuando podamos invertir C . Esto se cumple cuando el determinante de C es distinto de cero. Así, $|C| = m - 1 - 1 = m - 2$. La ecuación matricial tendrá solución única cuando $m \neq 2$.

Aunque no se pide, para el caso $m = 2$ la ecuación matricial no tiene solución.

Criterios de corrección:

- Justificar cuándo la solución es única, 0,75 puntos; obtener el determinante de C , 0,5 puntos; justificar los valores para los que la ecuación matricial tiene solución única, 0,25 puntos.

b.2) Para $m = 1$, tenemos que $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Por tanto $X = C^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Criterios de corrección:

- Obtener C^{-1} , 0,5 puntos; obtener el valor correcto de X , 0,5 puntos.

EJERCICIO 4. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una baraja española está compuesta de 40 cartas, entre las que hay 4 ases. En un juego de azar dos jugadores compiten entre sí. El primer jugador baraja las cartas y las va sacando una a una hasta que encuentra un as. A continuación, el otro jugador vuelve a juntar todas las cartas y repite estos pasos (es decir, vuelve a barajar y va sacando cartas hasta encontrar un as). Gana el jugador que más cartas haya sacado (contando el as). Si ambos sacan el mismo número de cartas, entonces se produce un empate.

a.1) [1,5 puntos] Calcula las probabilidades de que el as salga al sacar 1, 2 y 3 cartas, respectivamente.

a.2) [1 punto] Si el primer jugador ha sacado dos cartas (contando el as), ¿cuál es la probabilidad de que el segundo jugador le gane?

Solución:

a.1) Sea X la variable aleatoria que representa el número de cartas sacadas por un jugador (contando el as). El espacio muestral de X es $\Omega = \{1, 2, \dots, 37\}$. Las probabilidades que se piden son:

$$P(X = 1) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$P(X = 2) = \frac{36}{40} \cdot \frac{4}{39} = 0.0923$$

$$P(X = 3) = \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{4}{38} = 0.0850$$

Criterios de corrección:

- Obtener las probabilidades, 0,5 puntos cada una.

a.2) Dado que el primer jugador ha sacado dos cartas y que el número de cartas que saca cada jugador es independiente de las que saca el otro, el segundo jugador ganará si saca al menos 3 cartas:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2)) = 1 - 0.1923 = 0.8077$$

Criterios de corrección:

- Justificar que las cartas que saca cada jugador son sucesos independientes, 0,25 puntos; justificar la probabilidad que se pide, 0,5 puntos; obtener el valor correcto, 0,25 puntos.

Apartado b) Una empresa produce aparatos para medir distancias. Durante el proceso de calibración realiza una serie de experimentos para medir la distancia entre dos puntos, que están separados 1.5 metros entre sí. Debido al error de los aparatos, se sabe que los valores medidos siguen una distribución normal de media 1.5 m y varianza 0.64 m².

- b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la medición del aparato sea de más de 2.1 m?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la medición del aparato sea superior a 0.9 m?
- b.3) **[1 punto]** ¿Cuál es el valor de la distancia tal que el 80.51% de las mediciones estarían por encima de él?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

Solución:

Sea X la variable aleatoria que representa el valor medido por el aparato. La distribución de X es normal de media 1.5 m y varianza 0.64 m² (desviación típica de 0.8 m).

b.1) La probabilidad que se pide es

$$P(X > 2.1) = P\left(Z > \frac{2.1-1.5}{0.8}\right) = P(Z > 0.75) = 1 - P(Z < 0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266.$$

Criterios de corrección:

- Plantear la probabilidad que se pide correctamente, 0,25 puntos; expresar la probabilidad en función del área acumulada, 0,25 puntos; obtener el valor correcto, 0,25 puntos.

b.2) La probabilidad que se pide es

$$\begin{aligned} P(X > 0.9) &= P\left(Z > \frac{0.9-1.5}{0.8}\right) = P(Z > -0.75) = 1 - P(Z < -0.75) = 1 - (1 - P(Z < 0.75)) \\ &= P(Z < 0.75) = 0.7734 \end{aligned}$$

Criterios de corrección:

- Plantear la probabilidad que se pide correctamente, 0,25 puntos; expresar la probabilidad en función del área acumulada, 0,25 puntos; obtener el valor correcto, 0,25 puntos.

b.3) Sea q el valor que se pide. Este valor cumple que $P(X > q) = 0.8051$. Por tanto, tenemos:

$$P(X > q) = P\left(Z > \frac{q-1.5}{0.8}\right) = P\left(Z < -\frac{q-1.5}{0.8}\right) = 0.8051$$

$$\text{Así, } -\frac{q-1.5}{0.8} = 0.86 \text{ y tenemos que } q = 1.5 - 0.86 \cdot 0.8 = 0.812$$

Criterios de corrección:

- Plantear la probabilidad que se pide correctamente, 0,25 puntos; igualar el cociente al valor del cuantil correctamente, 0,5 puntos; obtener el valor correcto, 0,25 puntos.